Clase 10: Ejercicios Prácticos y Casos de Estudio sobre Optimización con Multiplicadores de Lagrange

Octavio Meza

Junio 2024

Introducción y Objetivos (30 minutos)

Objetivo General del Curso

Capacitar a los estudiantes en el uso de los multiplicadores de Lagrange para resolver problemas de optimización en diversos contextos, con un enfoque en la aplicación práctica mediante ejercicios y casos de estudio.

Objetivos Específicos de la Clase 10

1. Revisar los conceptos clave de los multiplicadores de Lagrange y su aplicación en optimización.
2. Aplicar los conocimientos adquiridos a través de ejercicios prácticos y casos de estudio.
3. Desarrollar habilidades para resolver problemas complejos utilizando MATLAB.
4. Fomentar la capacidad de análisis y síntesis de resultados en contextos reales.

Agenda de la Clase

1. Revisión de conceptos clave.
2. Ejercicios prácticos en MATLAB.
3. Casos de estudio detallados.
4. Problemas en clase.
5. Tarea.
6. Conclusiones y resumen.

Desglose del tiempo

- Introducción y objetivos de la clase: 10 minutos.
- Explicación del contenido y estructura de la clase: 10 minutos.
- Revisión de conceptos clave: 10 minutos.

1. Revisión de Conceptos Clave (30 minutos)

Contenido

Definición de Términos

- **Función Objetivo:** La función que se desea maximizar o minimizar.
- **Restricción:** Una ecuación que impone una condición sobre las variables de la función objetivo.
- **Multiplicador de Lagrange:** Un valor introducido para incorporar las restricciones en la optimización de la función objetivo.

Explicación del Método

Los multiplicadores de Lagrange se utilizan para encontrar los máximos y mínimos de una función objetivo $f(x, y)$ sujeta a una restricción $g(x, y) = 0$. Se define la función Lagrangiana:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(g(x, y) - c)$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange.

Paso a Paso en MATLAB

1. Definir la función objetivo y las restricciones.
2. Formular la función Lagrangiana.
3. Calcular las derivadas parciales de la Lagrangiana respecto a x, y y λ.
4. Resolver el sistema de ecuaciones resultante utilizando MATLAB.

2. Ejercicios Prácticos en MATLAB (50 minutos)

Ejercicio 1: Maximización del Beneficio

Enunciado del Problema: Una empresa produce dos productos, x y y. El beneficio se da por la función $B(x, y) = 50x + 40y$, sujeto a las restricciones de recursos $2x + y \leq 100$ y $x + 3y \leq 90$.

Fórmulas Utilizadas

- Función objetivo: $B(x, y) = 50x + 40y$
- Restricciones: $2x + y \leq 100$ y $x + 3y \leq 90$

Desarrollo en MATLAB

```
% Definir variables
syms x y lambda1 lambda2
B = 50*x + 40*y;
constraint1 = 2*x + y - 100;
constraint2 = x + 3*y - 90;

% Definir la Lagrangiana
L = B + lambda1*constraint1 + lambda2*constraint2;

% Calcular las derivadas parciales
dL_dx = diff(L, x);
dL_dy = diff(L, y);
dL_dlambda1 = diff(L, lambda1);
dL_dlambda2 = diff(L, lambda2);

% Resolver el sistema de ecuaciones
sol = solve([dL_dx == 0, dL_dy == 0, dL_dlambda1 == 0,
    dL_dlambda2 == 0], [x, y, lambda1, lambda2]);

% Mostrar la solucion
disp('Solucion:');
disp(sol);
```

Explicación

Este ejercicio muestra cómo utilizar MATLAB para calcular la cantidad óptima de producción de dos productos que maximiza el beneficio, considerando las restricciones de recursos. Se definen las variables, se formula la Lagrangiana, y se resuelven las ecuaciones resultantes.

Ejercicio 2: Minimización de Costos

Enunciado del Problema: Una empresa quiere minimizar el costo de producción $C(x, y) = 20x + 30y$ sujeto a la demanda de productos $x + y \geq 60$ y $2x + 3y \geq 120$.

Fórmulas Utilizadas

- Función objetivo: $C(x, y) = 20x + 30y$
- Restricciones: $x + y \geq 60$ y $2x + 3y \geq 120$

Desarrollo en MATLAB

```
% Definir variables
syms x y lambda1 lambda2
C = 20*x + 30*y;
constraint1 = x + y - 60;
constraint2 = 2*x + 3*y - 120;

% Definir la Lagrangiana
L = C + lambda1*constraint1 + lambda2*constraint2;

% Calcular las derivadas parciales
dL_dx = diff(L, x);
dL_dy = diff(L, y);
dL_dlambda1 = diff(L, lambda1);
dL_dlambda2 = diff(L, lambda2);

% Resolver el sistema de ecuaciones
sol = solve([dL_dx == 0, dL_dy == 0, dL_dlambda1 == 0,
    dL_dlambda2 == 0], [x, y, lambda1, lambda2]);

% Mostrar la solucion
disp('Solucion:');
disp(sol);
```

Explicación

Este ejercicio muestra cómo utilizar MATLAB para calcular la cantidad óptima de producción de dos productos que minimiza los costos, considerando las restricciones de demanda. Se definen las variables, se formula la Lagrangiana, y se resuelven las ecuaciones resultantes.

3. Casos de Estudio Detallados (60 minutos)

Caso de Estudio 1: Optimización en la Agricultura

Enunciado del Problema: Un agricultor quiere maximizar el rendimiento de dos cultivos, x y y, donde el rendimiento se da por la función $R(x, y) = 30x + 20y$. Las restricciones incluyen el uso de agua $3x + 4y \leq 180$ y el uso de fertilizante $2x + y \leq 80$.

Fórmulas Utilizadas

- Función objetivo: $R(x, y) = 30x + 20y$
- Restricciones: $3x + 4y \leq 180$ y $2x + y \leq 80$

Desarrollo en MATLAB

```
% Definir variables
syms x y lambda1 lambda2
R = 30*x + 20*y;
constraint1 = 3*x + 4*y - 180;
constraint2 = 2*x + y - 80;

% Definir la Lagrangiana
L = R + lambda1*constraint1 + lambda2*constraint2;

% Calcular las derivadas parciales
dL_dx = diff(L, x);
dL_dy = diff(L, y);
dL_dlambda1 = diff(L, lambda1);
dL_dlambda2 = diff(L, lambda2);

% Resolver el sistema de ecuaciones
sol = solve([dL_dx == 0, dL_dy == 0, dL_dlambda1 == 0,
    dL_dlambda2 == 0], [x, y, lambda1, lambda2]);

% Mostrar la solucion
disp('Solucion:');
disp(sol);
```

Explicación

Este caso de estudio muestra cómo aplicar los multiplicadores de Lagrange en MATLAB para optimizar el rendimiento agrícola, considerando restricciones de recursos como agua y fertilizante. Se definen las variables, se formula la Lagrangiana, y se resuelven las ecuaciones resultantes.

Caso de Estudio 2: Optimización en la Construcción

Enunciado del Problema: Un constructor quiere minimizar los costos de construcción $C(x, y) = 50x + 70y$ sujetos a restricciones de área $x \cdot y \geq 500$ y presupuesto $3x + 4y \leq 300$.

Fórmulas Utilizadas

- Función objetivo: $C(x, y) = 50x + 70y$
- Restricciones: $x \cdot y \geq 500$ y $3x + 4y \leq 300$

Desarrollo en MATLAB

```
% Definir variables
syms x y lambda1 lambda2
C = 50*x + 70*y;
constraint1 = x*y - 500;
constraint2 = 3*x + 4*y - 300;

% Definir la Lagrangiana
L = C + lambda1*constraint1 + lambda2*constraint2;

% Calcular las derivadas parciales
dL_dx = diff(L, x);
dL_dy = diff(L, y);
dL_dlambda1 = diff(L, lambda1);
dL_dlambda2 = diff(L, lambda2);

% Resolver el sistema de ecuaciones
sol = solve([dL_dx == 0, dL_dy == 0, dL_dlambda1 == 0,
    dL_dlambda2 == 0], [x, y, lambda1, lambda2]);

% Mostrar la solucion
disp('Solucion:');
disp(sol);
```

Explicación

Este caso de estudio muestra cómo aplicar los multiplicadores de Lagrange en MATLAB para minimizar los costos de construcción, considerando restricciones de área y presupuesto. Se definen las variables, se formula la Lagrangiana, y se resuelven las ecuaciones resultantes.

4. Problemas en Clase (30 minutos)

Problemas Propuestos

1. **Optimización en la Agricultura:**
    - Resolver un problema similar al caso de estudio, pero con diferentes restricciones de agua y fertilizante.
2. **Optimización en la Construcción:**
    - Resolver un problema similar al caso de estudio, pero con diferentes restricciones de área y presupuesto.

Desglose del tiempo

- Explicación y planteamiento de problemas: 10 minutos.

- Resolución de problemas en clase: 20 minutos.

5. Tarea (20 minutos)

Descripción de la Tarea

1. Resolver un problema de optimización utilizando los multiplicadores de Lagrange y MATLAB.

2. Presentar una solución detallada y bien documentada.

Desglose del tiempo

- Explicación de la tarea y expectativas: 10 minutos.

- Tiempo para iniciar la tarea en clase: 10 minutos.

6. Conclusiones y Resumen (20 minutos)

Contenido

1. Resumen de los temas cubiertos en la clase.

2. Importancia de la aplicación práctica de los multiplicadores de Lagrange en optimización.

3. Preguntas y respuestas.

4. Cierre de la clase.

Desglose del tiempo

- Resumen y conclusiones: 10 minutos.

- Preguntas y respuestas: 10 minutos.

Conclusiones

En esta clase, hemos explorado cómo aplicar los multiplicadores de Lagrange a través de ejercicios prácticos y casos de estudio en diversos contextos. Hemos aprendido a resolver problemas de optimización en agricultura y construcción utilizando MATLAB. A través de ejemplos detallados y ejercicios prácticos, los estudiantes han adquirido habilidades para aplicar estos conceptos en situaciones reales, interpretando y utilizando los resultados de manera efectiva. La práctica continua con los problemas en clase y la tarea les permitirá consolidar estos conocimientos y estar mejor preparados para enfrentar desafíos en sus respectivas disciplinas.

Bibliografía

1. Chiang, A. C., & Wainwright, K. (2005). *Fundamental Methods of Mathematical Economics*. McGraw-Hill.

2. Taha, H. A. (2011). *Operations Research: An Introduction*. Pearson.

3. Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press.

4. MathWorks. (2024). *MATLAB Documentation*. Retrieved from `https://www.mathworks.com/help/matlab/`

5. Luenberger, D. G. (1984). *Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley.