Clase 7: Aplicaciones en Física y Optimización con Multiplicadores de Lagrange

Octavio Meza

Junio 2024

Introducción y Objetivos (30 minutos)

Objetivo General del Curso

Capacitar a los estudiantes en el uso de los multiplicadores de Lagrange para resolver problemas de optimización en física, con el fin de mejorar su comprensión de las matemáticas y la física y prepararlos para desafíos académicos y profesionales.

Objetivos Específicos de la Clase 7

1. Comprender los fundamentos de los multiplicadores de Lagrange.
2. Aplicar los multiplicadores de Lagrange a problemas de optimización en física.
3. Desarrollar habilidades para resolver problemas de optimización utilizando MATLAB.
4. Consolidar el conocimiento teórico a través de ejemplos y ejercicios prácticos.

Agenda de la Clase

1. Introducción a los multiplicadores de Lagrange.
2. Aplicaciones en física.
3. Ejemplos en MATLAB.
4. Problemas en clase.
5. Tarea.
6. Conclusiones y resumen.

Desglose del tiempo

- Introducción y objetivos de la clase: 10 minutos.
- Explicación del contenido y estructura de la clase: 10 minutos.
- Relevancia de la optimización en física: 10 minutos.

1. Introducción a los Multiplicadores de Lagrange (30 minutos)

Contenido

Definición de Términos

- **Función Objetivo:** La función que se desea maximizar o minimizar.
- **Restricción:** Una ecuación que impone una condición sobre las variables de la función objetivo.
- **Multiplicador de Lagrange:** Un valor introducido para incorporar las restricciones en la optimización de la función objetivo.

Explicación del Método

Los multiplicadores de Lagrange se utilizan para encontrar los máximos y mínimos de una función objetivo $f(x, y)$ sujeta a una restricción $g(x, y) = 0$. Se define la función Lagrangiana:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(g(x, y) - c)$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange.

Paso a Paso

1. Formular la función Lagrangiana.
2. Calcular las derivadas parciales de la Lagrangiana respecto a x, y y λ.
3. Resolver el sistema de ecuaciones resultante para encontrar los valores óptimos.

2. Aplicaciones en Física (30 minutos)

Contenido

Problema 1: Optimización del Movimiento en un Plano Inclinado

Enunciado del Problema: Determinar la posición de un objeto en un plano inclinado que minimiza la energía potencial. **Fórmulas Utilizadas:**

- Energía potencial: $V = mgh$
- Restricción: $s = \frac{h}{\sin(\theta)}$

Paso a Paso

1. Formular la función Lagrangiana considerando la energía potencial y la restricción del plano inclinado.
2. Calcular las derivadas parciales y resolver el sistema de ecuaciones para encontrar la posición óptima del objeto.

Problema 2: Óptica y Reflexión de la Luz

Enunciado del Problema: Determinar el ángulo de incidencia para el cual el tiempo de viaje de la luz es mínimo cuando pasa de un medio a otro. **Fórmulas Utilizadas:**

- Ley de Snell: $n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$
- Tiempo de viaje: $T = \frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2}$
- Velocidad de la luz en un medio: $v = \frac{c}{n}$

Paso a Paso

1. Formular la función Lagrangiana considerando las velocidades y distancias en ambos medios.
2. Calcular las derivadas parciales y resolver el sistema de ecuaciones para encontrar el ángulo óptimo.

3. Ejemplos en MATLAB (40 minutos)

Ejemplo 1: Optimización del Movimiento en un Plano Inclinado

Enunciado del Problema: Determinar la posición de un objeto en un plano inclinado que minimiza la energía potencial. **Fórmulas Utilizadas:**

- Energía potencial: $V = mgh$
- Restricción: $s = \frac{h}{\sin(\theta)}$

```
% Definir variables
syms h s lambda
m = 1; % masa en kg
g = 9.8; % aceleracion debido a la gravedad en m/s^2
theta = pi/6; % angulo del plano inclinado en radianes
```

```
% Definir la energia potencial y la restriccion
V = m * g * h;
constraint = s - (h / sin(theta));

% Definir la Lagrangiana
L = V + lambda * constraint;

% Calcular las derivadas parciales
dL_dh = diff(L, h);
dL_ds = diff(L, s);
dL_dlambda = diff(L, lambda);

% Resolver el sistema de ecuaciones
sol = solve([dL_dh == 0, dL_ds == 0, dL_dlambda == 0], [h,
    s, lambda]);

% Mostrar la solucion
disp('Solucion:');
disp(sol);
```

Explicación

Este ejemplo muestra cómo utilizar MATLAB para calcular la posición óptima de un objeto en un plano inclinado que minimiza la energía potencial. Se definen las variables, se formula la Lagrangiana considerando la energía potencial y la restricción del plano inclinado, y se resuelven las ecuaciones resultantes.

Ejemplo 2: Óptica y Reflexión de la Luz

Enunciado del Problema: Determinar el ángulo de incidencia para el cual el tiempo de viaje de la luz es mínimo cuando pasa de un medio a otro. **Fórmulas Utilizadas:**

- Ley de Snell: $n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$
- Tiempo de viaje: $T = \frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2}$
- Velocidad de la luz en un medio: $v = \frac{c}{n}$

```
% Definir variables
syms theta1 theta2 lambda
n1 = 1.0; % indice de refraccion del primer medio
n2 = 1.5; % indice de refraccion del segundo medio
d1 = 10; % distancia en el primer medio en metros
d2 = 15; % distancia en el segundo medio en metros
c = 3e8; % velocidad de la luz en m/s

```

```
% Velocidades en ambos medios
v1 = c / n1;
v2 = c / n2;

% Definir la Lagrangiana
L = (d1 / v1 * sin(theta1) + d2 / v2 * sin(theta2)) +
    lambda * (n1 * sin(theta1) - n2 * sin(theta2));

% Derivadas parciales
dL_dtheta1 = diff(L, theta1);
dL_dtheta2 = diff(L, theta2);
dL_dlambda = diff(L, lambda);

% Resolver el sistema de ecuaciones
sol = solve([dL_dtheta1 == 0, dL_dtheta2 == 0, dL_dlambda
    == 0], [theta1, theta2, lambda]);

% Mostrar la solucion
disp('Solucion:');
disp(sol);
```

Explicación

Este ejemplo muestra cómo utilizar MATLAB para calcular el ángulo de incidencia óptimo para minimizar el tiempo de viaje de la luz cuando pasa de un medio a otro. Se definen las variables, se formula la Lagrangiana, y se resuelven las ecuaciones resultantes.

4. Problemas en Clase (30 minutos)

Problemas Propuestos

1. **Optimización del Movimiento en un Plano Inclinado:**
    - Encontrar la posición de un objeto que minimiza la energía potencial en un plano inclinado.
2. **Óptica y Reflexión de la Luz:**
    - Determinar el punto de reflexión en un espejo plano que minimiza el tiempo de viaje de la luz.

Desglose del tiempo

- Explicación y planteamiento de problemas: 10 minutos.
- Resolución de problemas en clase: 20 minutos.

5. Tarea (20 minutos)

Descripción de la Tarea

1. Resolver un problema de optimización en física utilizando los multiplicadores de Lagrange y MATLAB.

2. Presentar una solución detallada y bien documentada.

Desglose del tiempo

- Explicación de la tarea y expectativas: 10 minutos.

- Tiempo para iniciar la tarea en clase: 10 minutos.

6. Conclusiones y Resumen (10 minutos)

Contenido

1. Resumen de los temas cubiertos en la clase.

2. Importancia de las aplicaciones del método de los multiplicadores de Lagrange en física.

3. Preguntas y respuestas.

4. Cierre de la clase.

Desglose del tiempo

- Resumen y conclusiones: 5 minutos.

- Preguntas y respuestas: 5 minutos.

Conclusiones

En esta clase, hemos explorado las aplicaciones del método de los multiplicadores de Lagrange en física, centrándonos en problemas de optimización como el movimiento en un plano inclinado y la reflexión de la luz. Hemos aprendido a resolver estos problemas utilizando MATLAB. A través de ejemplos detallados y ejercicios prácticos, los estudiantes han adquirido habilidades para aplicar estos conceptos en situaciones reales, interpretando y utilizando los resultados de manera efectiva. La práctica continua con los problemas en clase y la tarea les permitirá consolidar estos conocimientos y estar mejor preparados para enfrentar desafíos en sus respectivas disciplinas.

Bibliografía

1. Goldstein, H., Poole, C., & Safko, J. (2002). *Classical Mechanics*. Addison-Wesley.

2. Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1976). *Mechanics*. Butterworth-Heinemann.

3. Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press.

4. MathWorks. (2024). *MATLAB Documentation*. Retrieved from `https://www.mathworks.com/help/matlab/`

5. Luenberger, D. G. (1984). *Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley.