Clase 6: Problemas de Optimización en Cálculo Diferencial e Integral

Octavio Meza

Junio 2024

Introducción y Objetivos (30 minutos)

Objetivo General del Curso

Capacitar a los maestros de bachillerato en el dominio de los operadores de Lagrange y su aplicación en la resolución de problemas de optimización con restricciones mediante el uso de MATLAB, con el fin de mejorar la calidad de la enseñanza de las matemáticas y las ciencias y preparar a los estudiantes para enfrentar desafíos académicos y profesionales en un entorno tecnológico y multidisciplinario.

Objetivos Específicos de la Clase 6

1. Comprender los problemas de optimización en cálculo diferencial e integral.
2. Aprender a resolver problemas de optimización utilizando técnicas de cálculo diferencial e integral.
3. Aplicar MATLAB para resolver problemas de optimización en cálculo diferencial e integral.
4. Consolidar el conocimiento teórico a través de ejemplos y ejercicios prácticos.

Agenda de la Clase

1. Introducción a los problemas de optimización en cálculo diferencial e integral.
2. Técnicas de optimización en cálculo diferencial.
3. Técnicas de optimización en cálculo integral.
4. Ejemplos en MATLAB.

5. Problemas en clase.
6. Tarea.
7. Conclusiones y resumen.

Desglose del tiempo

- Introducción y objetivos de la clase: 10 minutos.
- Explicación del contenido y estructura de la clase: 10 minutos.
- Relevancia de la optimización en cálculo diferencial e integral: 10 minutos.

Problemas de Optimización en Cálculo Diferencial e Integral (60 minutos)

Contenido

Optimización en Cálculo Diferencial

La optimización en cálculo diferencial consiste en encontrar los valores de una función que maximizan o minimizan dicha función utilizando técnicas de derivación. Se busca identificar puntos críticos y determinar su naturaleza (máximo, mínimo o punto de silla).

Definición de Términos

- **Derivada:** La tasa de cambio de una función respecto a una variable.
- **Punto Crítico:** Un punto donde la primera derivada de la función es igual a cero.
- **Máximo Relativo:** Un punto crítico donde la segunda derivada es negativa.
- **Mínimo Relativo:** Un punto crítico donde la segunda derivada es positiva.

Ejemplo de Optimización en Cálculo Diferencial

Encontrar el máximo de la función $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 2$:

1. Derivar la función: $f'(x) = 9x^2 - 12x$.
2. Igualar a cero: $9x^2 - 12x = 0$ =¿$x(x - \frac{4}{3}) = 0$ =¿$x = 0$ o $x = \frac{4}{3}$.
3. Verificar el signo de la segunda derivada $f''(x) = 18x - 12$:
   - $f''(0) = -12$ =¿máximo en $x = 0$.
   - $f''(\frac{4}{3}) = 12$ =¿mínimo en $x = \frac{4}{3}$.

Optimización en Cálculo Integral

La optimización en cálculo integral implica encontrar los valores de una función que maximizan o minimizan una integral definida. Esto es común en problemas de áreas y volúmenes, donde se busca optimizar el contenido de una región bajo ciertas condiciones.

Definición de Términos

- **Integral Definida:** La suma acumulada de las áreas bajo la curva de una función dentro de un intervalo.
- **Función Integrable:** Una función para la cual se puede calcular una integral definida.

Ejemplo de Optimización en Cálculo Integral

Maximizar el área bajo la curva $y = 4x - x^2$ en el intervalo $[0, b]$:

1. Calcular la integral: $A(b) = \int_0^b (4x - x^2)dx$.
2. Resolver la integral: $A(b) = [2x^2 - \frac{x^3}{3}]_0^b = 2b^2 - \frac{b^3}{3}$.
3. Derivar y encontrar el máximo: $A'(b) = 4b - b^2$.
4. Igualar a cero: $4b - b^2 = 0$ =¿ $b(4 - b) = 0$ =¿ $b = 0$ o $b = 4$.
5. Evaluar los puntos críticos: $A(4) = 2(4)^2 - \frac{(4)^3}{3} = \frac{32}{3}$.

Desglose del tiempo

- Optimización en cálculo diferencial: 30 minutos.
- Optimización en cálculo integral: 30 minutos.

Ejemplos en MATLAB (50 minutos)

Ejemplo 1: Optimización en Cálculo Diferencial

```
% Definicion de la funcion
f = @(x) 3*x.^3 - 6*x.^2 + 2;

% Derivada de la funcion
f_prime = @(x) 9*x.^2 - 12*x;

% Encontrar puntos criticos
x_criticos = fsolve(f_prime, [0, 2]);

% Evaluar la segunda derivada en los puntos criticos
```

```
f_double_prime = @(x) 18*x - 12;
f_double_prime_values = arrayfun(f_double_prime,
    x_criticos);

% Evaluar la funcion en los puntos criticos
f_values = arrayfun(f, x_criticos);

disp(['Puntos criticos: x = ', num2str(x_criticos)]);
disp(['Valores de la segunda derivada: ',
    num2str(f_double_prime_values)]);
disp(['Valores de la funcion: ', num2str(f_values)]);
```

Explicación

Este ejemplo muestra cómo utilizar MATLAB para encontrar los puntos críticos de una función y evaluar la segunda derivada para determinar la naturaleza de estos puntos. Se define la función, su derivada y se utilizan funciones de MATLAB para resolver y evaluar los puntos críticos.

Ejemplo 2: Optimización en Cálculo Integral

```
% Definicion de la funcion
f = @(x) 4*x - x.^2;

% Calcular la integral definida
A = @(b) integral(f, 0, b);

% Derivada de la funcion de area
A_prime = @(b) 4*b - b.^2;

% Encontrar el punto critico
b_critico = fsolve(A_prime, 2);

% Evaluar la integral en el punto critico
A_max = A(b_critico);

disp(['Punto critico: b = ', num2str(b_critico)]);
disp(['Area maxima: A = ', num2str(A_max)]);
```

Explicación

Este ejemplo muestra cómo utilizar MATLAB para maximizar una integral definida. Se define la función, se calcula la integral definida y se encuentra el punto crítico utilizando ‘fsolve‘. Finalmente, se evalúa la integral en dicho punto.

Desglose del tiempo

- Ejemplo 1: 25 minutos.
- Ejemplo 2: 25 minutos.

Problemas en Clase (30 minutos)

Problemas Propuestos

1. **Optimización en Cálculo Diferencial:**
   - Definir y maximizar la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$.
2. **Optimización en Cálculo Integral:**
   - Maximizar el área bajo la curva $y = 5x - x^2$ en el intervalo $[0, b]$.

Desglose del tiempo

- Explicación y planteamiento de problemas: 10 minutos.
- Resolución de problemas en clase: 20 minutos.

Tarea (20 minutos)

Descripción de la Tarea

1. Definir y maximizar la función $f(x) = -4x^2 + 8x - 3$ en cálculo diferencial.
2. Maximizar el área bajo la curva $y = 3x - x^2$ en el intervalo $[0, b]$ en cálculo integral.

Desglose del tiempo

- Explicación de la tarea y expectativas: 10 minutos.
- Tiempo para iniciar la tarea en clase: 10 minutos.

Conclusiones y Resumen (10 minutos)

Contenido

1. Resumen de los temas cubiertos en la clase.
2. Importancia de las técnicas de optimización en cálculo diferencial e integral.
3. Preguntas y respuestas.
4. Cierre de la clase.

Desglose del tiempo

- Resumen y conclusiones: 5 minutos.
- Preguntas y respuestas: 5 minutos.

Conclusiones

En esta clase, hemos explorado los problemas de optimización en cálculo diferencial e integral. Hemos aprendido a resolver problemas de optimización utilizando técnicas de cálculo diferencial e integral y a aplicar MATLAB para resolver estos problemas. A través de ejemplos detallados y ejercicios prácticos, los estudiantes han adquirido habilidades para aplicar estas técnicas en situaciones reales, interpretando y utilizando los resultados de manera efectiva. La práctica continua con los problemas en clase y la tarea les permitirá consolidar estos conocimientos y estar mejor preparados para enfrentar desafíos en sus respectivas disciplinas.

Bibliografía

1. Boyd, S., Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press.
2. Strang, G. (1991). *Linear Algebra and Its Applications*. Brooks Cole.
3. MathWorks. (2024). *MATLAB Documentation*. Retrieved from `https://www.mathworks.com/help/matlab/`
4. Luenberger, D. G. (1984). *Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley.