# Clase 4: Aplicaciones de los Multiplicadores de Lagrange

Octavio Meza

Junio 2024

## Introducción y Objetivos (30 minutos)

### Objetivo General del Curso

Capacitar a los maestros de bachillerato en el dominio de los operadores de Lagrange y su aplicación en la resolución de problemas de optimización con restricciones mediante el uso de MATLAB, con el fin de mejorar la calidad de la enseñanza de las matemáticas y las ciencias y preparar a los estudiantes para enfrentar desafíos académicos y profesionales en un entorno tecnológico y multidisciplinario.

### Objetivos Específicos de la Clase 4

1. Comprender diversas aplicaciones del método de los multiplicadores de Lagrange en diferentes disciplinas.
2. Aprender a formular y resolver problemas prácticos de optimización con restricciones utilizando MATLAB.
3. Desarrollar habilidades para interpretar los resultados obtenidos y aplicarlos a situaciones reales.
4. Consolidar el conocimiento teórico a través de ejemplos y ejercicios prácticos.

### Agenda de la Clase

1. Introducción a las aplicaciones del método de los multiplicadores de Lagrange.
2. Ejemplos de aplicaciones en diversas disciplinas.
3. Problemas en clase.
4. Tarea.
5. Conclusiones y resumen.

### Desglose del tiempo

- Introducción y objetivos de la clase: 10 minutos.
- Explicación del contenido y estructura de la clase: 10 minutos.
- Relevancia del método de los multiplicadores de Lagrange en aplicaciones prácticas: 10 minutos.

## Aplicaciones del método de los multiplicadores de Lagrange (60 minutos)

### Contenido

#### Aplicaciones en Economía

El método de los multiplicadores de Lagrange es ampliamente utilizado en economía para resolver problemas de maximización de utilidad y minimización de costos bajo ciertas restricciones presupuestarias.

#### Ejemplo: Maximización de Utilidad

Supongamos que un consumidor quiere maximizar su utilidad $U(x, y) = x^{0,5}y^{0,5}$ sujeta a la restricción presupuestaria $p_x x + p_y y = M$, donde $p_x$ y $p_y$ son los precios de los bienes $x$ y $y$, y $M$ es el ingreso total.

#### Aplicaciones en Ingeniería

En ingeniería, los multiplicadores de Lagrange se utilizan para optimizar diseños y procesos, como en el diseño de estructuras que soporten cargas específicas con el mínimo material posible.

#### Ejemplo: Minimización del Material

Minimizar el área de la sección transversal de una viga $A(x, y) = xy$ sujeta a la restricción de resistencia $\sigma(x, y) = \frac{F}{A} \leq \sigma_{\max}$, donde $F$ es la fuerza aplicada y $\sigma_{\max}$ es la resistencia máxima permisible.

#### Aplicaciones en Física

En física, el método de los multiplicadores de Lagrange se emplea para encontrar trayectorias de mínima acción y resolver problemas de mecánica con restricciones.

#### Ejemplo: Trayectoria de Mínima Acción

Determinar la trayectoria de una partícula que minimiza la acción $S = \int L dt$, donde $L$ es el lagrangiano del sistema, sujeto a restricciones de movimiento impuestas por fuerzas externas.

### Desglose del tiempo

- Aplicaciones en economía: 20 minutos.
- Aplicaciones en ingeniería: 20 minutos.
- Aplicaciones en física: 20 minutos.

## Ejemplos en MATLAB (50 minutos)

### Ejemplo 1: Maximización de Utilidad en Economía

```
% Definicion de la funcion de utilidad
U = @(x) x(1)^0.5 * x(2)^0.5;

% Definicion de la restriccion presupuestaria
p_x = 2; % Precio del bien x
p_y = 3; % Precio del bien y
M = 100; % Ingreso total
g = @(x) p_x * x(1) + p_y * x(2) - M;

% Definicion de la funcion Lagrangiana
L = @(x, lambda) U(x) + lambda * g(x);

% Derivadas parciales
syms x1 x2 lambda
L_sym = x1^0.5 * x2^0.5 + lambda * (p_x * x1 + p_y * x2 -
    M);
grad_L = gradient(L_sym, [x1, x2, lambda]);

% Resolucion del sistema de ecuaciones
sol = solve(grad_L == 0, [x1, x2, lambda]);
x_opt = double([sol.x1, sol.x2]);
lambda_opt = double(sol.lambda);

disp(['Consumo optimo de x: ', num2str(x_opt(1))]);
disp(['Consumo optimo de y: ', num2str(x_opt(2))]);
disp(['Multiplicador de Lagrange: lambda = ',
    num2str(lambda_opt)]);
```

### Explicación

Este ejemplo muestra cómo utilizar MATLAB para resolver un problema de maximización de utilidad bajo una restricción presupuestaria. Se define la función de utilidad y la restricción, se crea la función Lagrangiana y se resuelve el sistema de ecuaciones.

### Ejemplo 2: Minimización del Material en Ingeniería

```
% Definicion del area de la seccion transversal
A = @(x) x(1) * x(2);

% Definicion de la restriccion de resistencia
F = 1000; % Fuerza aplicada
sigma_max = 250; % Resistencia maxima permisible
g = @(x) sigma_max * x(1) * x(2) - F;

% Definicion de la funcion Lagrangiana
L = @(x, lambda) A(x) + lambda * g(x);

% Derivadas parciales
syms x1 x2 lambda
L_sym = x1 * x2 + lambda * (sigma_max * x1 * x2 - F);
grad_L = gradient(L_sym, [x1, x2, lambda]);

% Resolucion del sistema de ecuaciones
sol = solve(grad_L == 0, [x1, x2, lambda]);
x_opt = double([sol.x1, sol.x2]);
lambda_opt = double(sol.lambda);

disp(['Dimension optima de x: ', num2str(x_opt(1))]);
disp(['Dimension optima de y: ', num2str(x_opt(2))]);
disp(['Multiplicador de Lagrange: lambda = ',
    num2str(lambda_opt)]);
```

### Explicación

Este ejemplo muestra cómo utilizar MATLAB para resolver un problema de minimización del material bajo una restricción de resistencia. Se define el área de la sección transversal y la restricción, se crea la función Lagrangiana y se resuelve el sistema de ecuaciones.

### Desglose del tiempo

- Ejemplo 1: 25 minutos.
- Ejemplo 2: 25 minutos.

## Problemas en Clase (30 minutos)

### Problemas Propuestos

1. **Maximización de Beneficio:**

- Definir y maximizar la función de beneficio $B(x,y) = 10x+15y$ sujeta a la restricción presupuestaria $3x + 2y \leq 60$.

2. **Minimización de Costos:**

   - Definir y minimizar la función de costos $C(x,y) = 5x^2 + 3y^2$ sujeta a la restricción de producción $x + y = 10$.

### Desglose del tiempo

- Explicación y planteamiento de problemas: 10 minutos.
- Resolución de problemas en clase: 20 minutos.

## Tarea (20 minutos)

### Descripción de la Tarea

1. Definir y maximizar la función de utilidad $U(x,y) = x^{0,3}y^{0,7}$ sujeta a la restricción presupuestaria $4x + 5y = 100$.
2. Definir y minimizar la función de costos $C(x,y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a la restricción de producción $2x + y = 8$.

### Desglose del tiempo

- Explicación de la tarea y expectativas: 10 minutos.
- Tiempo para iniciar la tarea en clase: 10 minutos.

## Conclusiones y Resumen (10 minutos)

### Contenido

1. Resumen de los temas cubiertos en la clase.
2. Importancia de las aplicaciones del método de los multiplicadores de Lagrange.
3. Preguntas y respuestas.
4. Cierre de la clase.

### Desglose del tiempo

- Resumen y conclusiones: 5 minutos.
- Preguntas y respuestas: 5 minutos.

## Conclusiones

En esta clase, hemos explorado diversas aplicaciones del método de los multiplicadores de Lagrange en campos como la economía, la ingeniería y la física. Hemos aprendido a formular y resolver problemas prácticos de optimización con restricciones utilizando MATLAB. A través de ejemplos detallados y ejercicios prácticos, los estudiantes han adquirido habilidades para aplicar este método en situaciones reales, interpretando y utilizando los resultados de manera efectiva. La práctica continua con los problemas en clase y la tarea les permitirá consolidar estos conocimientos y estar mejor preparados para enfrentar desafíos en sus respectivas disciplinas.

## Bibliografía


1. Boyd, S., Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press.

2. Strang, G. (1991). *Linear Algebra and Its Applications*. Brooks Cole.

3. MathWorks. (2024). *MATLAB Documentation*. Retrieved from `https://www.mathworks.com/help/matlab/`

4. Luenberger, D. G. (1984). *Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley.