

# Clase 2: Fundamentos de Optimización

Octavio Meza

Junio 2024

## Introducción y Objetivos (30 minutos)

### Objetivo General del Curso

Capacitar a los maestros de bachillerato en el dominio de los operadores de Lagrange y su aplicación en la resolución de problemas de optimización con restricciones mediante el uso de MATLAB, con el fin de mejorar la calidad de la enseñanza de las matemáticas y las ciencias y preparar a los estudiantes para enfrentar desafíos académicos y profesionales en un entorno tecnológico y multidisciplinario.

### Objetivos Específicos de la Clase 2

1. Introducir los conceptos básicos de optimización.
2. Diferenciar entre problemas de maximización y minimización.
3. Comprender la importancia de las funciones objetivo y restricciones.
4. Aplicar MATLAB para resolver problemas básicos de optimización.

### Agenda de la Clase

1. Introducción a la optimización.
2. Problemas de maximización y minimización.
3. Conceptos básicos de funciones objetivo y restricciones.
4. Ejemplos en MATLAB.
5. Problemas en clase.
6. Tarea.
7. Conclusiones y resumen.

## Desglose del tiempo

- Introducción y objetivos de la clase: 10 minutos.
- Explicación del contenido y estructura de la clase: 10 minutos.
- Relevancia de la optimización: 10 minutos.

## Introducción a la optimización y problemas de maximización y minimización (60 minutos)

### Contenido

#### Definición de Optimización

La optimización es el proceso de hacer algo lo mejor posible. En matemáticas y ciencias aplicadas, esto a menudo implica encontrar el valor máximo o mínimo de una función, lo cual se puede aplicar a una amplia gama de problemas en diversas disciplinas como la economía, la ingeniería, la física y la biología.

#### Problemas de Maximización y Minimización

- **Maximización:** Se busca encontrar el punto en el que una función alcanza su valor más alto. Ejemplo: Maximizar el beneficio de una empresa.
- **Minimización:** Se busca encontrar el punto en el que una función alcanza su valor más bajo. Ejemplo: Minimizar el costo de producción.

#### Función Objetivo

La función objetivo es la función matemática que se desea maximizar o minimizar en un problema de optimización. Representa el criterio que se quiere optimizar.

#### Restricciones

Las restricciones son condiciones que deben cumplirse para que la solución del problema de optimización sea válida. Pueden ser de dos tipos:

- **Igualdad:** Restricciones que deben cumplirse exactamente. Ejemplo:  $x + y = 10$ .
- **Desigualdad:** Restricciones que limitan el rango de valores posibles. Ejemplo:  $x \geq 0$ .

## Desglose del tiempo

- Definición de optimización: 10 minutos.
- Problemas de maximización y minimización: 10 minutos.
- Función objetivo y restricciones: 20 minutos.
- Ejemplo teórico: 20 minutos.

## Conceptos básicos de funciones objetivo y restricciones (30 minutos)

### Contenido

#### Definición de Función Objetivo

La función objetivo es una expresión matemática que define el objetivo de un problema de optimización. Dependiendo del problema, el objetivo puede ser maximizar o minimizar esta función. Por ejemplo, en un problema económico, la función objetivo podría representar el beneficio total que se desea maximizar.

#### Ejemplo de Función Objetivo

Si una empresa desea maximizar su beneficio, la función objetivo podría ser:

$$\text{Beneficio} = \text{Ingresos} - \text{Costos}$$

Donde los ingresos y costos son funciones de las cantidades de productos vendidos y producidos, respectivamente.

#### Restricciones en Optimización

Las restricciones son condiciones o límites impuestos sobre las variables de decisión de un problema de optimización. Estas restricciones pueden ser de igualdad o desigualdad.

#### Ejemplo de Restricciones

- **Igualdad:**  $x + y = 10$  (La suma de dos variables debe ser 10).
- **Desigualdad:**  $x \geq 0$  (Una variable debe ser mayor o igual a 0).

## Desglose del tiempo

- Definición de función objetivo: 10 minutos.
- Tipos de restricciones: 10 minutos.
- Ejemplos en la vida real: 10 minutos.

## Ejemplos en MATLAB (50 minutos)

### Ejemplo 1: Maximización de una función cuadrática

```
1 % Definicion de la funcion objetivo
2 f = @(x) -x.^2 + 4*x;
3
4 % Visualizacion de la funcion
5 x = linspace(0, 5, 100);
6 y = f(x);
7 plot(x, y);
8 title('Funcion cuadratica');
9 xlabel('x');
10 ylabel('f(x)');
11 grid on;
12
13 % Encontrar el punto maximo
14 [max_val, max_idx] = max(y);
15 max_x = x(max_idx);
16 disp(['Punto maximo en x = ', num2str(max_x), ' con valor
        f(x) = ', num2str(max_val)]);
```

### Explicación

Este ejemplo muestra cómo encontrar el punto máximo de una función cuadrática utilizando MATLAB. Se define la función objetivo y se visualiza mediante un gráfico. Luego, se encuentra el punto máximo y se muestra el resultado.

### Ejemplo 2: Minimización de una función con restricciones

```
1 % Definicion de la funcion objetivo
2 f = @(x) x(1)^2 + x(2)^2;
3
4 % Definicion de las restricciones
5 A = [];
6 b = [];
7 Aeq = [1, 1];
8 beq = 1;
9 lb = [0, 0];
10 ub = [];
11
12 % Resolucion del problema de minimizacion
13 [x_min, fval] = fmincon(f, [0,0], A, b, Aeq, beq, lb, ub);
14 disp(['Punto minimo en x = ', num2str(x_min(1)), ', ',
        num2str(x_min(2)), ', ] con valor f(x) = ',
        num2str(fval)]);
```

## Explicación

Este ejemplo muestra cómo resolver un problema de minimización con restricciones utilizando MATLAB. Se define la función objetivo y las restricciones, y luego se utiliza la función `fmincon` para encontrar el punto mínimo. El resultado se muestra en la consola.

## Desglose del tiempo

- Ejemplo 1: 25 minutos.
- Ejemplo 2: 25 minutos.

## Problemas en Clase (30 minutos)

### Problemas Propuestos

#### 1. Maximización básica:

- Definir y maximizar la función  $f(x) = -2x^2 + 8x$  en el intervalo  $[0, 5]$ .

#### 2. Minimización con restricciones:

- Definir y minimizar la función  $f(x, y) = x^2 + y^2$  con la restricción  $x + y = 2$ .

## Desglose del tiempo

- Explicación y planteamiento de problemas: 10 minutos.
- Resolución de problemas en clase: 20 minutos.

## Tarea (20 minutos)

### Descripción de la Tarea

1. Definir y maximizar la función  $f(x) = -x^2 + 6x - 5$  en el intervalo  $[0, 5]$ .
2. Definir y minimizar la función  $f(x, y) = x^2 + 3y^2$  con las restricciones  $x + 2y = 4$  y  $x \geq 0, y \geq 0$ .

## Desglose del tiempo

- Explicación de la tarea y expectativas: 10 minutos.
- Tiempo para iniciar la tarea en clase: 10 minutos.

## Conclusiones y Resumen (10 minutos)

### Contenido

1. Resumen de los temas cubiertos en la clase.
2. Importancia de comprender los conceptos básicos de optimización.
3. Preguntas y respuestas.
4. Cierre de la clase.

### Desglose del tiempo

- Resumen y conclusiones: 5 minutos.
- Preguntas y respuestas: 5 minutos.

## Conclusiones

En esta clase, hemos explorado los fundamentos de la optimización, centrándonos en los problemas de maximización y minimización, así como en la definición y aplicación de funciones objetivo y restricciones. A través de ejemplos teóricos y prácticos en MATLAB, hemos demostrado cómo estos conceptos pueden aplicarse para resolver problemas reales. Los estudiantes ahora deberían tener una comprensión sólida de estos conceptos y estar preparados para aplicarlos en problemas más complejos en futuras clases. Además, la tarea asignada les permitirá practicar y consolidar lo aprendido.

## Bibliografía

1. MathWorks. (2024). *MATLAB Documentation*. Retrieved from <https://www.mathworks.com/help/matlab/>
2. Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press.
3. Strang, G. (1991). *Linear Algebra and Its Applications*. Brooks Cole.
4. Luenberger, D. G. (1984). *Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley.